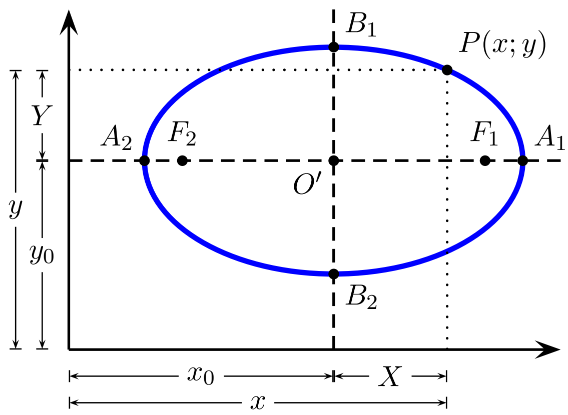
Ellisse riferita a rette parallele ai suoi assi

prof. F. Buratti – Liceo della Comunicazione “G. Toniolo”

(versione 0.3.6 – *venerdì 22 marzo 2007*)

1 Premessa

Finora abbiamo studiato l’equazione di un’ellisse riferita al centro e agli assi. Consideriamo ora invece un’ellisse avente il centro nel punto $O'(x_0; y_0)$ anziché nell’origine, e gli assi paralleli agli assi cartesiani.



2 Equazione dell’ellisse nel sistema di riferimento $O'XY$

Nel sistema di riferimento traslato $O'XY$ avente l’origine in O', l’equazione dell’ellisse è evidentemente:

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1}$$

3 Equazioni della traslazione

Esaminando il grafico sopra riportato, possiamo vedere che le coordinate di un generico punto P nei due sistemi di riferimento Oxy ed $O'XY$ sono legate tra loro dalle seguenti equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

4 Equazione dell'ellisse nel sistema di riferimento Oxy

Sostituendo X con $(x - x_0)$ ed Y con $(y - y_0)$ nell'equazione dell'ellisse, possiamo scrivere l'equazione dell'ellisse nel sistema di riferimento Oxy. Otteniamo:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \qquad (1)$$

Dall'equazione (1), sviluppando i calcoli e riordinando i termini secondo le potenze decrescenti di x e y, si ottiene:

$$(b^2)x^2 + (a^2)y^2 - (2x_0b^2)x - (2y_0a^2)y + (x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2) = 0$$

Ponendo ora:

$$\begin{cases} m = b^2 \\ n = a^2 \\ p = -2x_0b^2 \\ q = -2y_0a^2 \\ r = x_0^2b^2 + y_0^2a^2 - a^2b^2 \end{cases} \qquad (2)$$

possiamo scrivere l'equazione nella seguente forma:

$$\boxed{mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0}$$

Notiamo, rispetto all'equazione dell'ellisse riferita al centro e agli assi, la comparsa dei termini di primo grado in x e in y.

5 Esercizio esemplificativo[1]

ESERCIZIO. Data l'ellisse di equazione $16x^2 + 9y^2 - 32x + 36y - 92 = 0$, determinare:

1. le coordinate del centro;
2. le misure dei semiassi;
3. le coordinate dei fuochi;
4. l'eccentricità.

SOLUZIONE. La presenza dei termini di primo grado in x e in y nell'equazione dell'ellisse indica che si tratta di un'ellisse traslata; per risolvere l'esercizio occorre cercare di riscrivere l'equazione nella forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Nel sistema di riferimento traslato avente l'origine nel centro $O'(x_0; y_0)$ dell'ellisse, l'equazione sarà del tipo $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$; utilizzando le equazioni della traslazione

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

possiamo scrivere

$$16(X + x_0)^2 + 9(Y + y_0)^2 - 32(X + x_0) + 36(Y + y_0) - 92 = 0$$

e, sviluppando i quadrati e riordinando secondo le potenze decrescenti di X e Y,

$$16X^2 + 9Y^2 + (32x_0 - 32)X + (18y_0 + 36)Y + (16x_0^2 + 9y_0^2 - 32x_0 + 36y_0 - 92) = 0$$

Dato che nel sistema di riferimento avente l'origine nel centro dell'ellisse l'equazione manca dei termini di primo grado in X e in Y, riconosciamo che dev'essere:

$$\begin{cases} 32x_0 - 32 = 0 \\ 18y_0 + 36 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Il centro dell'ellisse sarà quindi $O'(1; -2)$. Sostituendo nella precedente equazione i valori trovati per x_0 e y_0, otteniamo:

$$16X^2 + 9Y^2 + 0 \cdot X + 0 \cdot Y + 16 \cdot 1^2 + 9 \cdot (-2)^2 - 32 \cdot 1 + 36 \cdot (-2) - 92 = 0$$

[1] Anche se nel paragrafo successivo ricaveremo delle espressioni esplicite per le grandezze caratteristiche dell'ellisse in funzione dei coefficienti m, n, p, q, r che compaiono nell'equazione, vogliamo mostrare che, per calcolare tali grandezze caratteristiche, è sufficiente applicare correttamente le equazioni della traslazione.

cioè

$$16X^2 + 9Y^2 - 144 = 0$$

Avremo perciò:

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

Le misure dei semiassi sono di conseguenza $a = 3$, $b = 4$. Pertanto l'equazione dell'ellisse può essere riscritta come:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

Dato che $a < b$, l'ellisse ha i fuochi su una retta parallela all'asse y e quindi le coordinate dei fuochi sono $(x_0; y_0 \pm c)$, con $c^2 = \sqrt{b^2 - a^2}$. Pertanto la semidistanza focale è:

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{7}$$

e le coordinate dei fuochi sono:

$$F_1(1; -2 + \sqrt{7}) \qquad F_2(1; -2 - \sqrt{7})$$

mentre l'eccentricità è:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

6 Espressioni per il centro, i semiassi e i fuochi[2]

PROBLEMA: Data l'equazione di un'ellisse riferita a rette parallele ai suoi assi, vogliamo ricavare le espressioni per:

- le coordinate del centro O'
- le misure dei semiassi a e b
- le coordinate dei fuochi F_1 e F_2

[2] Lo studio di questo paragrafo è facoltativo; è quindi possibile ometterne la lettura senza che sia compromessa la comprensione dell'argomento.

6.1 Coordinate del centro

Utilizzando le equazioni (2), possiamo ricavare l'espressione delle coordinate del centro $O'(x_0; y_0)$:

$$\boxed{x_0 = -\frac{p}{2m}} \qquad \boxed{y_0 = -\frac{q}{2n}}$$

Sarà pertanto:

$$\boxed{O'\left(-\frac{p}{2m}; -\frac{q}{2n}\right)}$$

6.2 Misure dei semiassi

Posto

$$\boxed{s = \frac{p^2}{4m} + \frac{q^2}{4n} - r}$$

risulta:

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{s}{m}}} \qquad \boxed{b = \sqrt{\frac{s}{n}}}$$

6.3 Coordinate dei fuochi

I fuochi si trovano ad uguale distanza dall'origine, e sono poste su un asse parallelo all'asse x o su un asse parallelo all'asse y, a seconda che sia $a > b$, oppure $a < b$. In particolare, risulterà:

$$\begin{array}{llll} a > b & \Rightarrow & c = \sqrt{a^2 - b^2}, & F_{1,2}(x_0 \pm c; y_0) \\ a < b & \Rightarrow & c = \sqrt{b^2 - a^2}, & F_{1,2}(x_0; y_0 \pm c) \end{array}$$

Indice